1. Titre :

Formalisation en théorie des types homotopiques de la variété hypercubique

2. Contexte :

La théorie des types homotopiques [1] est un paradigme alternatif à la théorie des ensembles reliant logique et géométrie dans un cadre unificateur. Elle se base sur la théorie des types (omniprésente en informatique théorique), auquel s'ajoute l'axiome d'univalence, introduit par Voevodsky au début du siècle sur la base d'une intuition de nature topologique. Cet axiome a notamment pour conséquence que les types se comportent comme des espaces topologiques à déformation près, et les égalités comme des chemins topologiques. Cette théorie se révèle alors très propice à la formalisation par ordinateur de résultats mathématiques (notamment en topologie algébrique ; voir par exemple [2] ou [3]). En effet de nombreux concepts clés mais techniques en théorie de l'homotopie - par exemple la notion de fibration, ou de CW-complexe - s'expriment de manière tout à fait naturelle dans ce cadre.

Le cercle par exemple, s'il est défini comme un ensemble possédant une infinité de points en géométrie standard (donc difficile à représenter dans un ordinateur), est construit en théorie des types homotopiques comme un simple point $\star$ muni d'une égalité $\star = \star$. Les égalités étant vues comme des chemins, on obtient un type qui va effectivement se comporter comme un cercle d'un point de vue homotopique.

Plus récemment (2016), une variante de la théorie des types homotopiques - la théorie des types cubiques [4] - a vu le jour. Dans cette axiomatisation alternative, les types peuvent dépendre de "directions" et donc être cubiques en un sens géométrique.

Dans ce contexte, on s'intéresse à la variété hypercubique, une construction classique en topologie standard [5] (qui remonte aux travaux de Poincaré au début du siècle dernier sur les sphères d'homologie). Il s'agit d'un quotient de la 3-sphère obtenu en faisant agir le groupe des quaternions sur l'hypercube réel de dimension 4. Il se trouve que cet espace se represente naturellement comme un cube (plein) dans lequel les faces opposées on étées identifiées après une rotation d'un quart de tour. Cela suggère que l'on puisse encoder la variété hypercubique de manière concise et élégante en théorie des types cubiques, similairement à ce qui a été fait pour le tore par exemple [6]. l'intérêt étant que cet espace contient notamment de l'information homologique concernant le groupe des quaternions, et donc nous renseigne sur la structure de ce groupe en un certain sens.

3. But du stage

Le but du stage serait donc d'implémenter la variété hypercubique en théorie des types homotopiques via la version cubique de l'assistant de preuve Agda. Ensuite, on pourra essayer de prouver que l'espace construit a effectivement les bonnes propriétés, par exemple en calculant son groupe fondamental.

4. Bibliographie

[1] : The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics.* https://homotopytypetheory.org/book, Institute for Advanced Study, 2013. Verlag, Basel (2009). Reprint of the 1999 edition [MR1711612]
[2] : Ulrik Buchholtz and Kuen-Bang Hou (Favonia). Cellular cohomology in homotopy type theory. arXiv:1802.02191
[3] : Daniel R. Licata and Eric Finster. Eilenberg-MacLane Spaces in Homotopy Type Theory.
[4] : Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber and Anders Mörtberg. Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom. arXiv:1611.02108
[5] Henri Poincaré. Analysis Situs, Journal de l'École Polytechnique, t. 1, 1895, p.1—121.
[6] Anders Mörtberg, Andrea Vezzosi and Evan Cavallo. Standard library for cubical Agda. https://github.com/agda/cubical/blob/master/Cubical/HITs/Torus/Base.